

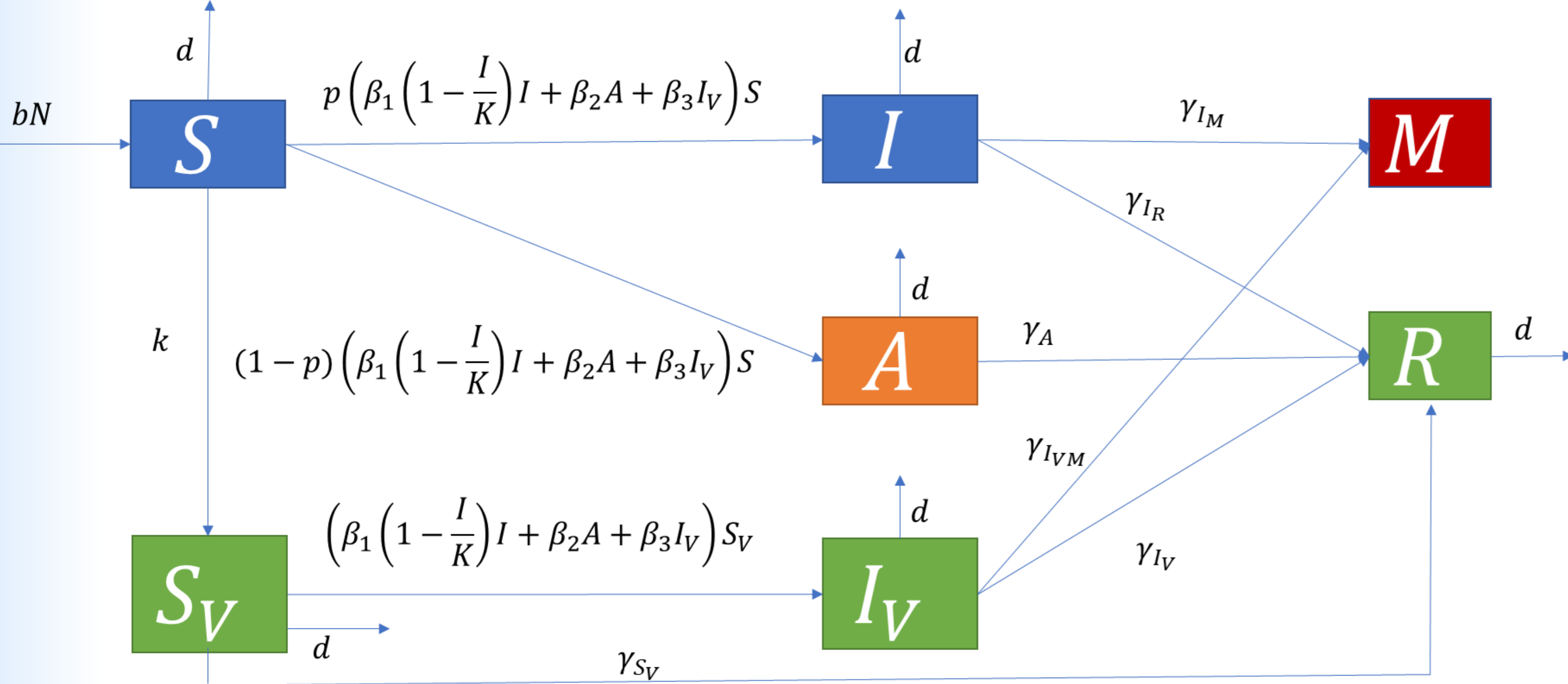


Modelo Matemático SAIRM con vacunación

Pedro Isaac Pesantes Grados, Roxana López Cruz
Universidad Nacional Mayor de San Marcos - Lima, Perú

Introducción

Los modelos matemáticos aplicados a la epidemiología han cobrado gran importancia dada la actual pandemia por la COVID-19. Con el objetivo de analizar algunas características de los brotes epidémicos donde se usen estrategias de vacunación e inmunidad parcial, se presenta el siguiente diagrama de flujo del modelo compartimental:



Modelo Matemático

$$S' = bN - \left(\beta_1 \left(1 - \frac{I}{K}\right) + \beta_2 A + \beta_3 I_V\right) S - \kappa S - dS$$

$$A' = (1-p) \left(\beta_1 \left(1 - \frac{I}{K}\right) + \beta_2 A + \beta_3 I_V\right) S - \gamma_A A - dA$$

$$I' = p \left(\beta_1 \left(1 - \frac{I}{K}\right) + \beta_2 A + \beta_3 I_V\right) S - \gamma_{IR} I - \gamma_{IM} I - dI$$

$$R' = \gamma_{IR} I + \gamma_A A + \gamma_{SV} S_V + \gamma_{IV} I_V - dR$$

$$M' = \gamma_{IM} I + \gamma_{IVM} I_V$$

$$S_V' = \kappa S - \left(\beta_1 \left(1 - \frac{I}{K}\right) + \beta_2 A + \beta_3 I_V\right) S_V - \gamma_{SV} S_V - dS_V$$

$$I_V' = \left(\beta_1 \left(1 - \frac{I}{K}\right) + \beta_2 A + \beta_3 I_V\right) S_V - \gamma_{IV} I_V - \gamma_{IVM} I_V - dI_V$$

Condiciones iniciales:
 $S(0) > 0, A(0) \geq 0, I(0) \geq 0, R(0) \geq 0, M(0) \geq 0, S_V(0) \geq 0, I_V(0) \geq 0$

Parámetro	Descripción
b	Tasa de natalidad
β_1	Coefficiente de transmisión de infectados sintomáticos a cualquier susceptible
β_2	Tasa de transmisión de infectados asintomáticos a cualquier susceptible
β_3	Tasa de transmisión de vacunados infectados a cualquier susceptible
κ	Tasa de vacunación de la población
K	Capacidad de carga para los infectados sintomáticos
d	Tasa de mortalidad
Parámetro	Descripción
p	Probabilidad de ser infectado sintomático
γ_A	Tasa de recuperación de los infectados asintomáticos
γ_{IR}	Tasa de recuperación de los infectados sintomáticos
γ_{IM}	Tasa de mortalidad de los infectados sintomáticos
γ_{SV}	Tasa de recuperación de los vacunados infectados
γ_{IV}	Tasa de recuperación de los vacunados infectados
γ_{IVM}	Tasa de mortalidad de los vacunados infectados

Principales resultados analíticos

Punto de equilibrio libre de infección (E^*)

Para hallarlo, hacemos $A = I = L = 0, N = S^* + R^* + S^*, M^* \geq 0$, con lo cual obtenemos:

$$E^* = (S^*, 0, 0, R^*, M^*, S_V^*, 0)$$

Donde:

$$S^* = \left(\frac{b}{\kappa + d}\right) N \quad S_V^* = \left(\frac{\kappa}{\gamma_{SV} + d}\right) S^* \quad R^* = \left(\frac{\gamma_{SV}}{d}\right) S_V^*$$

Número Básico Reproductivo (\mathcal{R}_0)

$$\mathcal{R}_0 = \left(\frac{p\beta_1}{\gamma_{IR} + \gamma_{IM} + d} + \frac{(1-p)\beta_2}{\gamma_A + d} + \frac{\kappa\beta_3}{(\gamma_{SV} + d)(\gamma_{IV} + \gamma_{IVM} + d)} \right) S^*$$

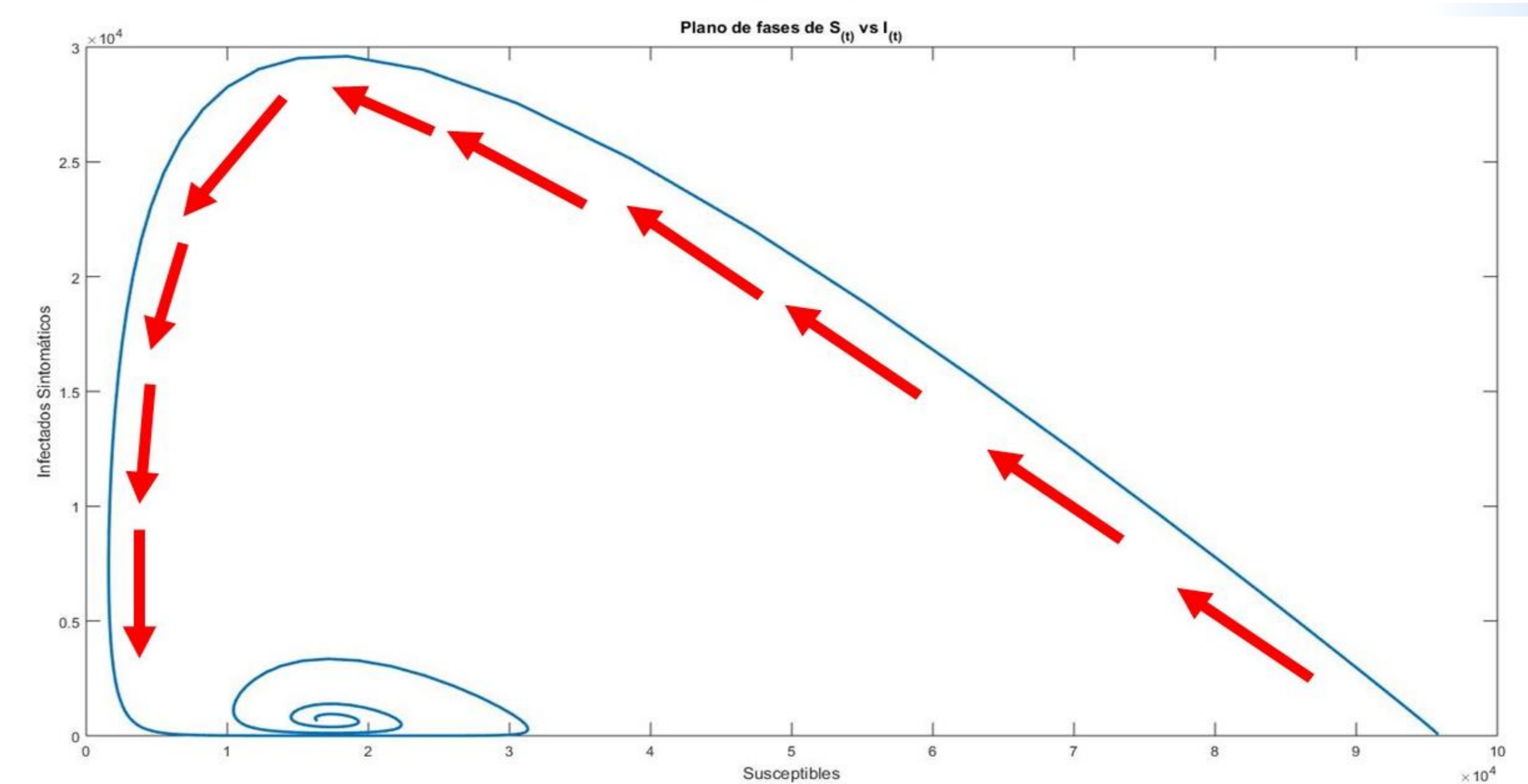
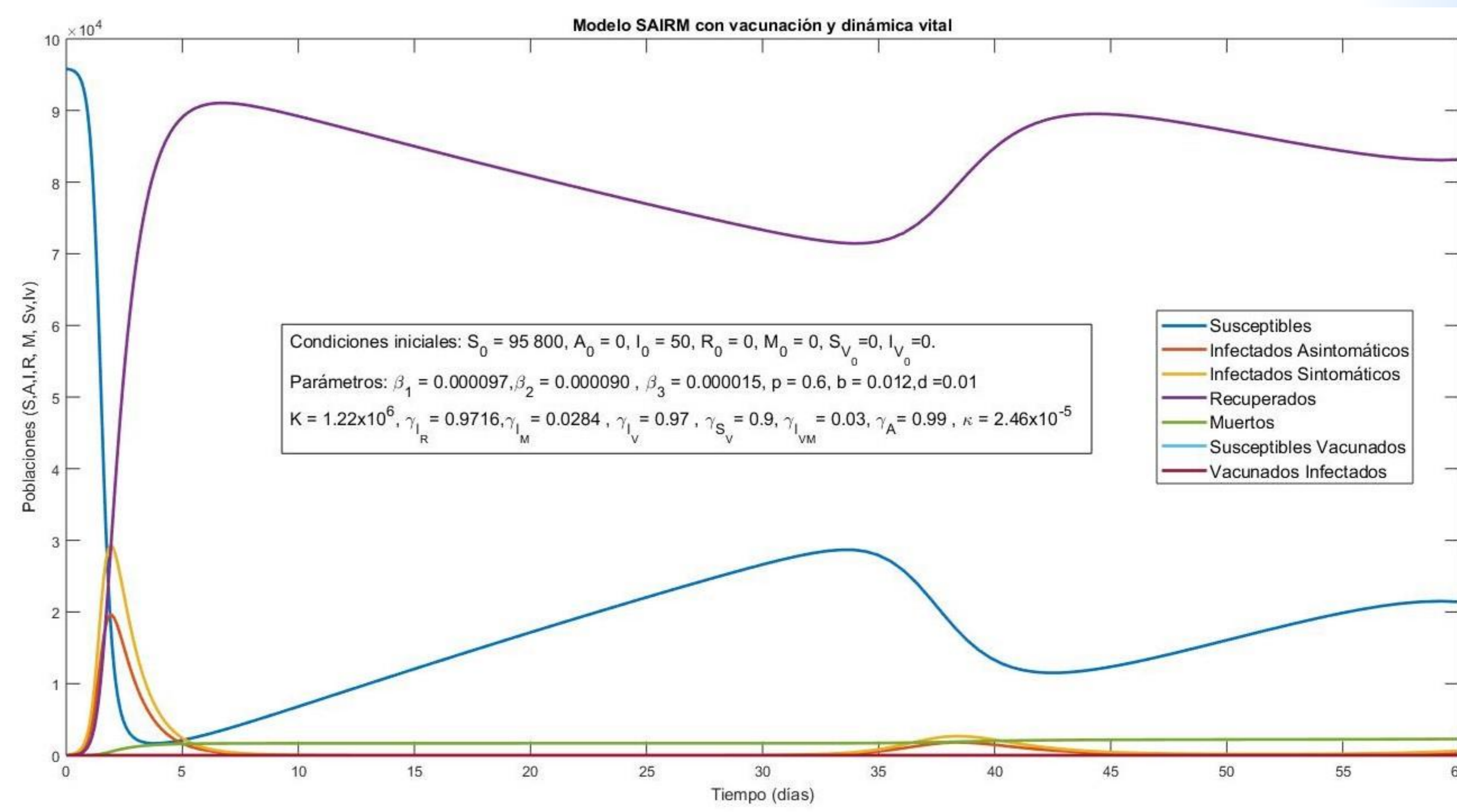
$$\mathcal{R}_I = \frac{p\beta_1 S^*}{\gamma_{IR} + \gamma_{IM} + d} \quad \mathcal{R}_A = \frac{(1-p)\beta_2 S^*}{\gamma_A + d} \quad \mathcal{R}_V = \frac{\kappa\beta_3 S^*}{(\gamma_{SV} + d)(\gamma_{IV} + \gamma_{IVM} + d)}$$

Teorema (Estabilidad local del punto de equilibrio libre de infección)

El modelo SAIRM dado por el sistema de ecuaciones diferenciales presentado posee un punto libre de infección $E^* = (S^*, 0, 0, R^*, M^*, S_V^*, 0)$ con $S^* = \left(\frac{b}{\kappa + d}\right) N, S_V^* = \left(\frac{\kappa}{\gamma_{SV} + d}\right) S^*, R^* = \left(\frac{\gamma_{SV}}{d}\right) S_V^*, N = S^* + R^* + S^*, M^* \geq 0$, el cual es asintóticamente estable bajo la condición que $\mathcal{R}_0 < 1$.

Simulaciones

1. Los gráficos de las soluciones aproximadas y de los planos de fase se realizaron en MATLAB:



2. Se realizó una implementación animada web con el paquete Shiny en lenguaje R:

Conclusiones

- El modelo SAIRM con vacunación e inmunidad parcial propuesto posee un punto de equilibrio libre de infección asintóticamente estable.
- Es posible observar mediante las simulaciones el efecto de la limitación en la tasa de transmisión de la enfermedad de los contagiados sintomáticos junto con la inmunidad parcial en la dinámica del sistema.
- Es posible desarrollar entornos virtuales para optimizar la didáctica educativa al abordar problemas epidemiológicos.

Referencias

- Pal, D., Ghosh, D., Santra, P. K., & Mahapatra, G. S. (2020). Mathematical analysis of a COVID-19 epidemic model by using data driven epidemiological parameters of diseases spread in India. medRxiv.
- Qiu, Z., & Feng, Z. (2010). Transmission dynamics of an influenza model with vaccination and antiviral treatment. Bulletin of mathematical biology, 72(1), 1-33.
- Van den Driessche, P. (2017). Reproduction numbers of infectious disease models. Infectious Disease Modelling, 2(3), 288-303.
- Wang, F., Zhang, Y., Wang, C., & Ma, J. (2015). Stability analysis of an e-SEIAR model with point-to-group worm propagation. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 20(3), 897-904.